

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP.**

CAMPUS DE PRESIDENTE PRUDENTE

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA - FCT.

**CURSO:** Matemática

**DISCIPLINA:** Desenho Geométrico e **Geometria Descritiva**

**ALUNO (A):** .....

Prof<sup>ª</sup>: Dalila Espinhosa

## GEOMETRIA DESCRITIVA

### Generalidades

A Geometria Descritiva tem por finalidade representar no plano as figuras do espaço, de modo a podermos, com o auxílio da geometria plana, estudar suas propriedades.

A Geometria Descritiva atinge suas finalidades utilizando-se um sistema de projeção, que permite representar no plano as figuras do espaço.

O sistema de projeção, utilizado na Geometria Descritiva, é o de projeção cilíndrica ortogonal. Este sistema será abordado após definirmos sistemas de projeção.

### Introdução ao desenho projetivo

Os elementos a serem considerados na Geometria Descritiva são:

1. Objeto Descritivo: elemento que se estuda;
2. Plano de Projeção: plano no qual se projeta o objeto descritivo;
3. Projetantes: reta que passa pelo ponto no espaço se dirigindo ao plano de projeção (une o ponto no espaço ao plano de projeção).

### Sistema de Projeção

Dizemos que uma figura do espaço se projeta de um ponto “O” sobre um plano “ $\pi$ ”, que não contém o ponto “O”, quando determinamos, sobre o plano “ $\pi$ ” as interseções dos vários raios projetantes determinados pelo centro de projeção “O” e pelos pontos da figura.

		/ / 2007
01	Sistemas de Projeção	Geom. Descr.

De acordo com a posição ocupada pelo centro de projeção (finito ou infinito), os sistemas de projeção se classificam em: 1. Sistema de Projeção Central, Cônica ou Perspectiva;

2. Sistema de Projeção Cilíndrica.

### 1. Sistema de Projeção Central, Cônica ou Perspectiva.

Este sistema de projeção é determinado pelo ponto “O” de projeção (posição finita) e pelo plano de projeção “ $\pi$ ”. Vamos considerar a figura “F” a projetar.

A figura “F” considerada é o triângulo ABC, cuja projeção sobre o plano “ $\pi$ ”, feita do centro de projeção “O”, é o triângulo  $A\pi$ ,  $B\pi$ ,  $C\pi$ , que é a Figura  $F\pi$ .

Com o centro de projeção “O”, ocupando uma posição finita, as projetantes resultam convergentes, razão pela qual este sistema é denominado de Central, Cônica ou Perspectiva.

### 2. Sistema de Projeção Cilíndrica

Este sistema é determinado por:

- a. Uma direção de projeção  $\lambda$ .
- b. Um plano de projeção  $\pi$ , não paralelo à direção  $\lambda$ .

O centro de projeção “O” está situado no infinito e as suas projetantes são representadas paralelas à direção  $\lambda$ .

		/ / 2007
02	Sistemas de Projeção	Geom. Descr.

Podemos ter dois tipos de projeção cilíndrica:

- a. Projeção Cilíndrica Oblíqua;
- b. Projeção Cilíndrica Ortogonal.

**a. Projeção Cilíndrica Oblíqua**

$\lambda$  = Direção de projeção, oblíqua ao plano, determinando o centro de projeção “O” (infinito);

F = Figura a projetar;

$\pi$  = Plano de projeção;

$F\pi$  = Projeção de F segundo a direção  $\lambda$  sobre o plano  $\pi$ .

A projeção da figura F sobre o plano  $\pi$ , feita do centro “O” (infinito) de projeção determinado pela direção  $\lambda$ , é a figura  $F\pi$ .

A figura F considerada é o triângulo ABC. Sua projeção sobre o plano  $\pi$  feita do centro de projeção determinado pela direção  $\lambda$  é o triângulo  $A\pi$ ,  $B\pi$ ,  $C\pi$ , (projeção cilíndrica oblíqua).

		/ / 2007
03	Sistemas de Projeção	Geom. Descr.

## b. Projeção cilíndrica Ortogonal

$\lambda$  = Direção de projeção, normal ao plano, determinando o centro de projeção “O” (infinito);

F = Figura a projetar;

$\pi$  = Plano de projeção;

$F\pi$  = Projeção de F segundo a direção  $\lambda$  sobre o plano  $\pi$ .

A projeção da figura F sobre o plano  $\pi$ , feita do centro “O” (infinito) de projeção determinado pela direção  $\lambda$ , normal ao plano de projeção, é a figura  $F\pi$ .

A figura F considerada é o triângulo ABC, cuja projeção cilíndrica ortogonal, sobre o plano  $\pi$ , é o triângulo  $A\pi$ ,  $B\pi$ ,  $C\pi$ .

Este último sistema foi adotado por Gaspar Monge, idealizador da Geometria Descritiva.

### Nomenclatura Convencional Adotada

Plano: Letra Grega ( $\pi$ )

Ponto no Espaço: Letras maiúsculas (A)

Ponto Projetado: Letras maiúsculas acrescidas de índice ( $A_1$ )

		/ / 2007
04	Sistemas de Projeção	Geom. Descr.

Planos Projetantes: PH - Plano Horizontal ( $\pi_1$ )

PV - Plano Vertical ( $\pi_2$ )

Interseção do PV ( $\pi_2$ ) com PH ( $\pi_1$ ) = Linha de Terra (LT)

Reta no Espaço: Letra minúscula (r)

Reta Projetada: Letra minúscula acrescida de índice 1 ou 2.

Exemplo: No PV ( $\pi_2$ ) =  $a_2$

No PH ( $\pi_1$ ) =  $a_1$

Diedros: Algarismos Romanos

Verdadeira Grandeza: VG

### **GASPAR MONGE (1746 - 1818)**

#### **Histórico**

É considerado o “Pai da Geometria Descritiva”. Desde jovem, Monge utilizava este método gráfico na solução de problemas relacionados com fortificações e armamentos, enquanto seguia estudos militares na França.

Foi repreendido pelo seu mestre a não resolver problemas pelo então coerente e tedioso processo matemático. Somente depois de longas explicações e comparações das soluções de ambos os métodos foi capaz de convencer seus mestres de que seus métodos gráficos poderiam ser utilizados para resolução de problemas, em um tempo muito menor.

Este método foi então superior à solução matemática, o qual permaneceu durante quinze anos como segredo militar, antes que se permitisse ensiná-lo como parte do plano técnico de estudos.

Monge chegou a ser conselheiro científico e matemático de Napoleão durante seu reinado, General e Imperador da França.

A Geometria Descritiva pode ser definida como projeção de figuras tridimensionais sobre o plano bidimensional do papel de tal forma que permite manipulações geométricas condizentes à determinação de longitudes, formas e outras informações descritivas das figuras.

		/ / 2007
05	Método Mongeano de Projeção	Geom. Descr.

# MÉTODO MONGEANO DE PROJEÇÃO

(Sistema de projeção cilíndrico ortogonal adotado por Monge)

## Estudo do ponto - Alfabeto do ponto

A projeção de um ponto é o pé da perpendicular baixada do ponto ao plano (sistema de projeção cilíndrica ortogonal).

A projeção do ponto A sobre o plano  $\pi$  é o ponto  $A\pi$ , pé da perpendicular baixada do ponto ao plano  $\pi$ .

Devemos observar que somente uma projeção  $A\pi$ , do ponto A não basta para fixar sua posição no espaço, pois, qualquer ponto como o ponto B pertencente à reta  $AA\pi$ , terá sua projeção  $B\pi$  coincidente com  $A\pi$ .

Para fixar a posição de um ponto no espaço, Gaspar Monge criou o método de dupla projeção cilíndrica ortogonal, ou método mongeano de projeção, utilizado na Geometria Descritiva, que emprega dois planos perpendiculares entre si, sobre os quais se projeta o ponto ortogonalmente.

Esses dois planos de projeção, perpendiculares entre si, são os planos horizontal de projeção  $\pi_1$  e vertical de projeção  $\pi_2$ .

A intersecção do plano horizontal com o plano vertical, chama-se Linha de Terra, que será indicada por “LT”, ou para simplificar, por dois traços paralelos à Linha de Terra, conforme figura abaixo:

		/ / 2007
06	Projeções: estudo do ponto	Geom. Descr.

A linha de terra sendo a intersecção do plano vertical  $\pi_2$ , com o plano horizontal  $\pi_1$  pode ser indicada também por  $LT = \pi_2 \pi_1$ .

A projeção de um ponto A recebe o nome do plano em que este é projetado. Assim a projeção vertical de um ponto A é efetuada sobre o plano vertical  $\pi_2$  e será indicada por  $A_2$ .

A sua projeção horizontal é efetuada sobre o plano horizontal  $\pi_1$  e indicada por  $A_1$ .

Na figura anterior estão representados um ponto A do espaço e também:

- a. PH - Plano horizontal de projeção;
- b. PV - Plano vertical de projeção;
- c.  $A_1$  - Projeção do ponto A no plano horizontal;
- d.  $A_2$  - Projeção do ponto A no plano vertical;
- e.  $AA_1$  - Cota do ponto A =  $A_2 A_0$  = dist. do ponto A ao plano horizontal;
- f.  $AA_2$  - Afastamento do ponto A =  $A_1 A_0$  = dist. do ponto A ao plano vertical;

Os centros de projeção são os pontos  $O_1$  e  $O_2$ , definidos pelas direções de projeção  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . Por convenção considera-se o observador colocado no 1º diedro.

O ponto A está situado sobre as retas  $AA_2$  e  $AA_1$ , estando sua posição, no espaço, determinada pelas duas projeções  $A_2$  e  $A_1$ .

Os planos de projeção ortogonais entre si determinam quatro diedros no espaço.

Resultam os semi-planos de projeção:

PHA =  $\pi_1A$  - Plano horizontal Anterior;

PHP =  $\pi_1P$  - Plano horizontal Posterior;

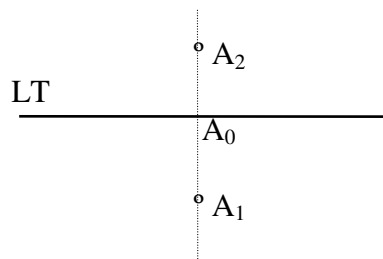
PVS =  $\pi_2S$ - Plano vertical Superior;

PVI =  $\pi_2I$  - Plano vertical Inferior;

OBS.: Os semi-planos são denominados de Planos, para simplificação.

Para passarmos da figura do espaço para o plano, efetuamos o rebatimento do PH, sobre o PV até que ambos coincidam (rotação de  $90^\circ$  em torno da Linha de Terra, abrindo o I diedro).

O ponto A no espaço será representado por  $(A_2, A_1)$  conforme figura abaixo:



Sendo:

$A_2A_0$  = Cota do ponto;

$A_1A_0$  = Afastamento do ponto;

*A figura acima é denominada de épura do ponto A do espaço.*

OBS.: Existe outra convenção denomina as projeções do ponto A de  $(a, a')$  ou  $(a', a)$  sendo  $\underline{a'}$  sua projeção vertical e  $\underline{a}$  sua projeção horizontal.

## ÉPURA

**Definição:** é a representação da figura por suas projeções, após o rebatimento do PH sobre o PV.

Ler uma épura é objetivar os dois planos de projeção, ortogonais entre si, e a figura do espaço que a mesma representa.

### Linha de Chamada

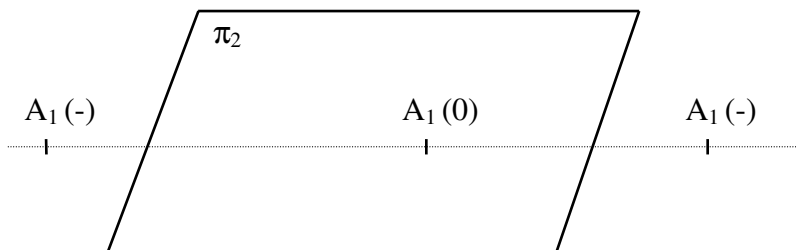
Definição: é a reta da épura perpendicular à Linha de Terra, unindo as duas projeções do ponto.

/ / 2007

## Afastamento

Definição: é a distância do ponto ao plano vertical de projeção.

O afastamento do ponto será positivo quando se encontrar na porção anterior ( $\pi_1A$ ), será nulo quando estiver no plano de projeção  $\pi_2$ , será negativo quando estiver na porção posterior ( $\pi_1P$ ).



## Cota

Definição: é a distância do ponto ao plano horizontal de projeção.

A cota do ponto será positiva quando estiver na porção superior do plano ( $\pi_2S$ ), será nula quando estiver no plano horizontal de projeção  $\pi_1$ , será negativa quando estiver na porção inferior ( $\pi_2I$ ).

Assim, o ponto poderá ocupar nove posições diferentes em relação aos planos de projeção.

### Posições do Ponto

Posição	Afastamento	Cota
1º Diedro	+	+
2º Diedro	-	+
3º Diedro	-	-
4º Diedro	+	-
PH Anterior	+	nula
PH Posterior	-	nula
PV Superior	nulo	+
PV Inferior	nulo	-
Ponto na LT	nulo	nula

OBS.: A cota de um ponto qualquer do espaço é igual, na épura, à distância de sua projeção vertical à LT.

O afastamento de um ponto qualquer do espaço é igual, na épura, à distância de sua projeção horizontal à LT.

		/ / 2007
09	Projeções: estudo do ponto	Geom. Descr.

## EXERCÍCIOS:

1) Executar a leitura (perspectiva) e a écura das posições que um ponto pode ocupar, no espaço, em relação aos dois planos de projeção (PH e PV).

**I Diedro**- afastamento (+) e cota (+)

**II Diedro** - Afastamento (-) e cota (+)

		/ / 2007
10	Estudo do ponto, exercícios.	Geom. Descr.

**III Diedro** - afastamento (-) e cota(-)

**IV Diedro** - afastamento (+) e cota (-)

		/ / 2007
11	Estudo do ponto, exercícios.	Geom. Descr.

**PH anterior** - afastamento (+) e cota (nula)

**PH posterior** - afastamento (-) e cota (nula)

		/ / 2007
12	Estudo do ponto, exercícios.	Geom. Descr.

**PV superior** - afastamento (nulo) e cota (+)

**PV inferior** - afastamento (nulo) e cota (-)

		/ / 2007
13	Estudo do ponto, exercícios.	Geom. Descr.

Ponto na Linha de Terra - afastamento (nulo) e cota (nula)

2) Determine as projeções dos pontos abaixo. (leitura e é pura)

A (50,20) mm

/ / 2007

14

Estudo do ponto, exercícios.

Geom. Descr.

B (-30,10) mm

C (-30, -10) mm

/ / 2007

D (30,-20) mm

E (30,0) mm

		/ / 2007
16	Estudo do ponto, exercícios.	Geom. Descr.

F (-20,0) mm

G (0,0) mm

/ / 2007

## CONVENÇÕES PARA EXECUÇÃO DO DESENHO EM ÉPURA

Na solução de um problema, na é pura, devem ser observadas as seguintes convenções:

———— (linha cheia) - dados e resultados;

..... (traço e ponto) - linhas auxiliares e de construção;

..... (tracejada) - linhas de chamada;

..... (pontilhada) - linhas invisíveis.

Devemos observar também que os planos de projeção são considerados opacos. Assim, somente são visíveis as figuras situadas no 1º diedro, pois o observador, por convenção, está situado neste diedro.

A observação sistemática destas convenções só trará benefícios ao estudante, pois em problemas mais complexos, simplificará não só a execução, mas também a leitura da é pura.

Outra regra que auxiliará o estudante é fazer com que, em problemas no 1º diedro, não haja superposição de retas traçadas em projeção horizontal, com retas traçadas em projeção vertical (a não ser que haja necessidade disto). Esta superposição só servirá para sobrecarregar a é pura, e trazer dificuldades desnecessárias.

Em é puras feitas a lápis, as linhas de chamada poderão ser feitas em tracejado ou traço fino que não sobrecarregue o desenho.

## PONTO DADO POR 3 COORDENADAS

Para que a posição do ponto fique perfeitamente definida, usa-se um terceiro plano de projeção chamado Plano Lateral ( $\pi_3$ ), que é perpendicular aos planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$ .

A distância do ponto ao PL ( $\pi_3$ ) é chamada “Abcissa”, e na *épura* é marcado na Linha de Terra.

A intersecção dos planos PH, PV e PL é um ponto: ponto zero, origem das três coordenadas.

A projeção do ponto no Plano Lateral será designadas pela letra maiúscula correspondente acrescida do índice 3, (exemplo:  $A_3$ ). A abcissa será positiva quando o ponto se encontrar à direita do PL, e negativa quando o ponto estiver à esquerda, e nula quando estiver no PL.

Também o PL será rebatido até coincidir com o PV.

Esse rebatimento será no sentido horário, se a abcissa for positiva, e anti-horário se for negativa.

Rebatimento do PL considerando-se um ponto de abcissa negativa.

Leitura:

Épura:

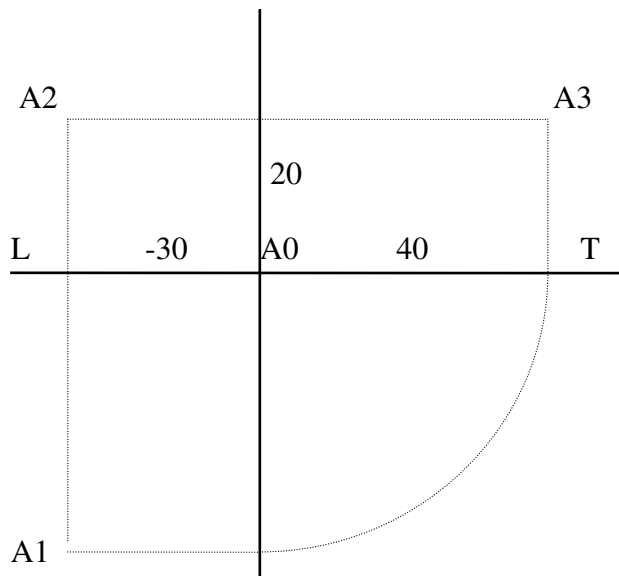
		/ / 2007
20	Projeções: Estudo do Ponto.	Geom. Descr.

EXEMPLO:

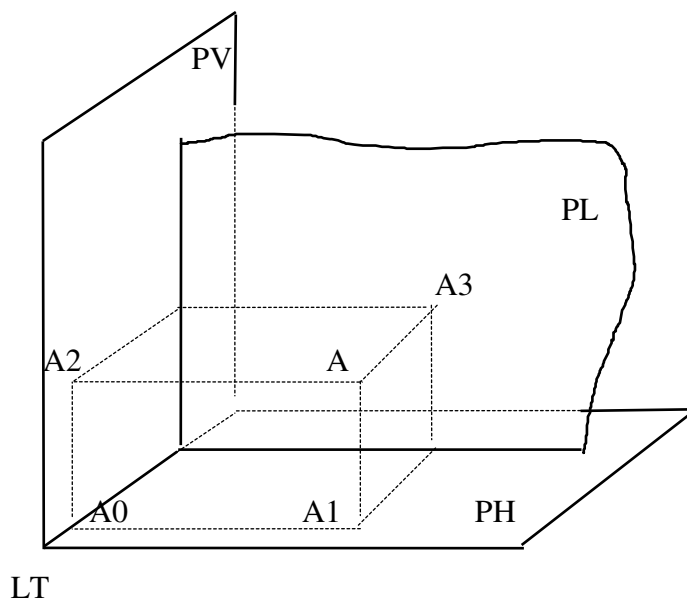
Determinar as projeções dos pontos dados; resolução em é pura e leitura (perspectiva).

A (-30, 40, 20)

Épura: (sem escala)



Leitura: (sem escala)



## EXERCÍCIOS:

1) Determinar as projeções dos pontos abaixo, em épura e leitura.

A (-30, -40, 20) mm

Leitura:

Épura:

/ / 2007

B (-30, -40, -20) mm

Leitura:

Épura:

/ / 2007

C (-30, 40, -20) mm

Leitura:

Épura:

/ / 2007

D (30, 20, 20) mm

Leitura:

Épura:

/ / 2007

E (0, 20, -20) mm

Leitura:

Épura:

/ / 2007

2) Determinar as projeções do triângulo A, B, C, em é pura e leitura.

A (-60, 20, 20) mm

B (-40, 20, 40) mm

C (-20, 20, 20) mm

/ / 2007

## ESTUDO DA RETA

### Alfabeto da reta

Posições que uma reta pode ocupar em relação aos planos de projeção.

Teorema: um ponto pertencendo a uma reta, suas projeções pertencem às projeções de igual nome da reta.

OBS.: a recíproca nem sempre é verdadeira.

Teorema: a projeção de uma reta sobre um plano não perpendicular à mesma, é uma reta.

Notação: a reta situada no espaço será indicada por letra latina minúscula. (Ex.: reta “r”)

A projeção da reta sobre um plano será indicada pela letra latina minúscula que a individualiza, acrescida do índice que identifica o plano de projeção. (Ex.: proj. de r em  $\pi_1 \Rightarrow r_1$ )

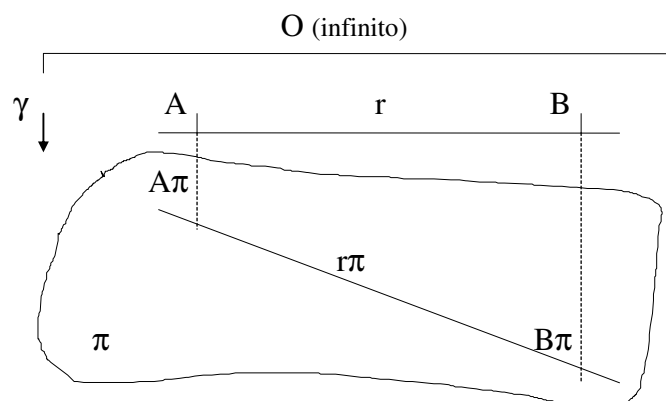
### Projeção de uma reta

A projeção de reta AB, sobre  $\pi$ , feita do centro O (infinito) dado pela direção  $\gamma$  fica determinada pelas projeções de dois de seus pontos, sobre o mesmo plano, como por exemplo os pontos A e B, cujas projeções são  $A\pi$  e  $B\pi$ . A projeção da reta AB sobre  $\pi$  será  $A\pi B\pi$ .

A, B,  $A\pi$  e  $B\pi$  é o plano projetante da reta, que denomina-se plano de projeção vertical.

OBS.: o estudante conhece perfeitamente a diferença que existe entre reta e segmento de reta.

No presente estudo iremos, em vários problemas, confundir porém, as palavras “reta” e “segmento de reta”, para facilidade de expressão.



		/ / 2007
28	Projeções: Estudo da reta	Geom. Descr.

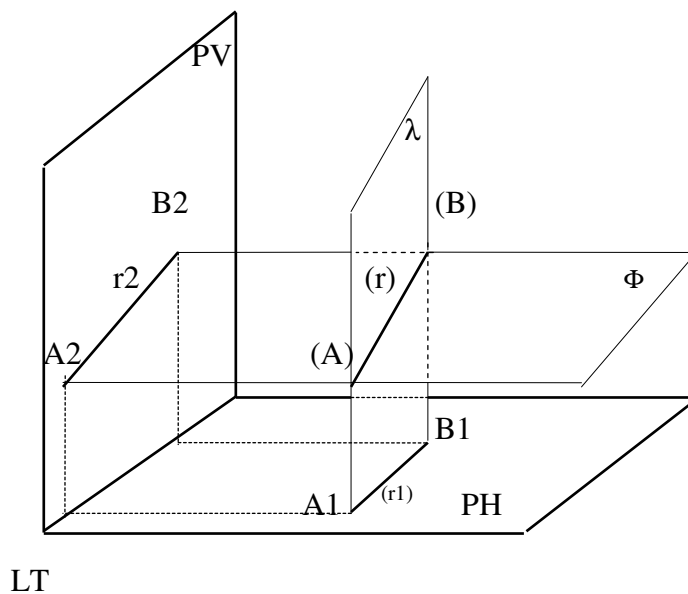
## Reta Qualquer em Mongeana

Vamos considerar uma reta  $AB$  do espaço.

O plano  $AB A_2 B_2$ , é o plano  $\Phi$  denominado projetante de topo da reta. O plano  $AB A_1 B_1$  é o plano  $\lambda$  denominado projetante vertical da reta. A projeção vertical da reta é feita sobre o PV e é representada pela projeção de dois pontos,  $A_2$  e  $B_2$ , ou por uma letra minúscula, com índice,  $r_2$ .

Analogamente, a projeção horizontal da reta é feita sobre o PH e é representada por  $A_1 B_1$ , ou  $r_1$ .

Representa-se pois:  $AB (A_2 B_2 A_1 B_1)$ , ou  $AB = (r_2, r_1)$  ou  $(A_2 B_2, A_1 B_1)$  ou  $(r_2, r_1)$ .



A é pura correspondente a figura anterior, é a figura a seguir, na qual  $A_2 B_2$  ou  $r_2$  é a projeção vertical da reta  $AB$  e  $A_1 B_1$  ou  $r_1$  é a sua projeção horizontal.

É pura:

		/ / 2007
29	Projeções: Estudo da reta	Geom. Descr.

## Traços de uma reta

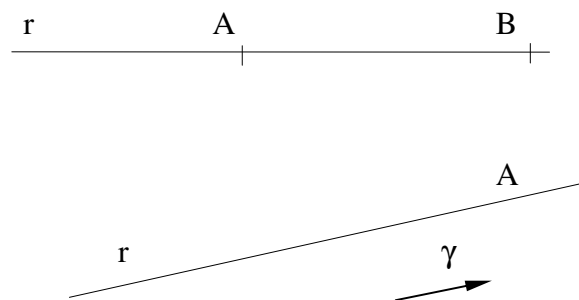
Traços de uma reta são os pontos de intersecção da mesma com os planos de projeção.

Notação: traços de reta. Os traços de um reta com os planos de projeção serão designados sempre pelas retas V (traço vertical) e H (traço horizontal).

Os ângulos serão designados por letras gregas minúsculas com indicação de ângulo. ( $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\delta}$ )

Uma reta fica determinada quando se tem:

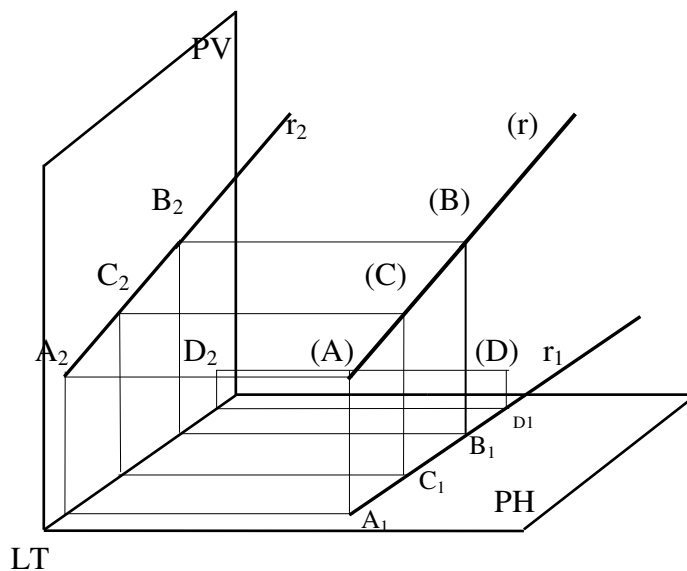
- dois pontos (por dois pontos pode-se traçar uma única reta)
- um ponto e uma reta direção ( por um ponto pode-se traçar uma única reta paralela a uma direção dada)



## Relação entre Ponto e Reta

Um ponto pertence a uma reta quando suas projeções estão situadas nas projeções de mesmo nome, da reta.

OBS.: Projeção vertical do ponto ( $A\pi_2$ ) na projeção vertical da reta ( $r\pi_2$ ).



em é pura:

Em relação a um plano a reta pode ocupar três posições:

a. paralela

b. perpendicular

c. oblíqua

**a. Paralela:** a projeção da reta é igual a reta no espaço (verdadeira grandeza).

**b. perpendicular:** a projeção da reta se reduz a um ponto.

**c. oblíqua:** sua projeção é menor que o tamanho da reta no espaço.

		/ / 2007
31	Projeções: Estudo da reta	Geom. Descr.

O ângulo que a reta forma com um plano  $\pi$  (quando não for perpendicular) é igual ao ângulo que ela forma com sua projeção nesse plano.

### **Retas Notáveis**

Em relação aos planos de projeção ( $\pi_1$ ,  $\pi_2$ ) a reta pode ocupar várias posições; posições essas que determinam nomes e propriedades particulares.

#### *1. Reta qualquer*

É a reta oblíqua aos planos de projeção ( $\pi_1$ ,  $\pi_2$ ). Sua épura é caracterizada por possuir ambas as projeções ( $r_1$ ,  $r_2$ ) oblíquas à linha de terra.

Leitura:

Épura:

		/ / 2007
32	Projeções: Estudo da reta	Geom. Descr.

## 2. Reta horizontal (ou de nível)

É a paralela ao plano horizontal ( $\pi_1$ ) e oblíqua ao plano vertical ( $\pi_2$ ).

Sua écura é caracterizada por possuir a projeção vertical (r2) paralela à linha de terra (LT) e a projeção horizontal (r1) oblíqua a essa mesma linha.

A projeção horizontal representa a verdadeira grandeza (V.G.).

Leitura:

Écura:

## 3. Reta frontal (ou de frente).

É a reta paralela ao plano vertical ( $\pi_2$ ) e oblíqua ao plano horizontal ( $\pi_1$ ).

Sua écura é caracterizada por possuir a projeção horizontal (r1) paralela à linha de terra (LT) e a projeção vertical (r2) oblíqua a essa mesma linha.

A projeção vertical (r2) representa a V. G.

Leitura:

/ / 2007

Épura:

#### 4. *Reta Frontal - Horizontal (paralela à linha de terra)*

É a reta paralela simultaneamente aos dois planos de projeção ( $\pi_1$ ,  $\pi_2$ ).

Sua épura é caracterizada por possuir ambas as projeções ( $r_1$ ,  $r_2$ ) paralelas à linha de terra.

Qualquer das projeções, representa a verdadeira grandeza (V. G.).

Leitura:

Épura:

#### 5. *Reta vertical*

É a reta perpendicular ao plano horizontal.

Sua épura é caracterizada por possuir a projeção horizontal ( $r_1$ ) reduzida a um ponto e a vertical perpendicular à linha de terra (L.T.); e que representa a V.G.

Leitura:

		/ / 2007
34	Projeções: Estudo da reta	Geom. Descr.

Épura:

### 6. Reta de topo

Inversamente à reta vertical, a reta de topo é a reta perpendicular ao plano vertical. Sua épura caracteriza-se por possuir a projeção vertical ( $r_2$ ) reduzida a um ponto e a projeção horizontal ( $r_1$ ) perpendicular à linha de terra, que representa a verdadeira grandeza.

Leitura:

Épura:

		/ / 2007
35	Projeções: Estudo da reta	Geom. Descr.

### **7. Reta de Perfil**

É a reta perpendicular (ou ortogonal) à linha de terra.

É toda reta contida num plano de perfil.

OBS.: a determinação dos traços da reta de perfil será objeto de estudo no desenvolver do programa.

Leitura:

Épura:

### **8. Reta pertencente ao PH**

É uma reta horizontal de cota nula.

Esta reta tem as mesmas propriedades da horizontal, tendo sua projeção vertical sobre a LT.

Leitura:

Épura:

		/ / 2007
36	Projeções: Estudo da reta	Geom. Descr.

### **9. Reta pertencente ao PV.**

É uma reta frontal de afastamento nulo (projeção horizontal coincidente com a LT).

Leitura:

Épura:

### **10. Reta pertencente ao 1º Bissetor**

Todo ponto de uma reta do 1º bissetor tem afastamento igual a cota, e todo ponto de uma reta do 1º bissetor tem cota e afastamento iguais.

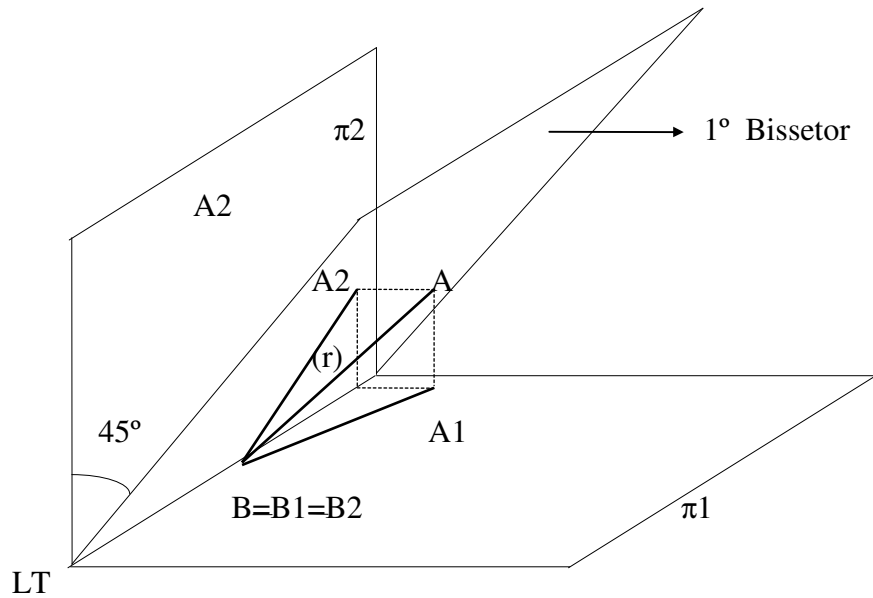
Logo, toda reta do 1º bissetor tem suas projeções fazendo igual ângulo com a LT.

Suas projeções A2B2 e A1B1 fazem o mesmo ângulo  $\alpha$  com a L.T., sendo simétricas em relação a mesma.

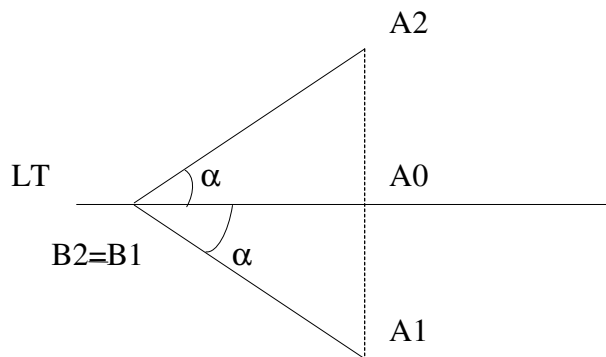
Um ponto qualquer sobre a reta AB, como o ponto A, tem cota e afastamento iguais, ou A2A0 = A1A0 .

		/ / 2007
37	Projeções: Estudo da reta	Geom. Descr.

Leitura:

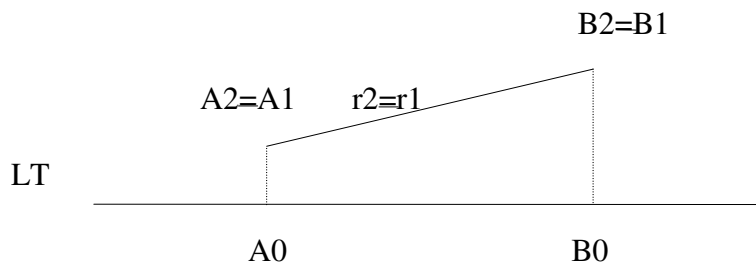


Épura:



### 11. Reta pertencente ao 2º Bissetor

Toda reta do 2º bissetor tem as duas projeções coincidentes, em épura.



A figura acima é a épura de uma reta AB, pertencente ao 2º bissetor.

		/ / 2007
38	Projeções: Estudo da reta	Geom. Descr.

## 12. Reta de maior declive

Reta de maior declive de um plano  $\gamma$  é a reta deste plano que forma com a sua projeção horizontal o maior ângulo possível. O maior ângulo que uma reta de um plano  $\gamma$  faz com o PH é igual ao ângulo entre esses dois planos, chamado de ângulo diedro.

Sabemos que, para determinar o ângulo diedro de dois planos (no caso o ângulo  $\alpha$  entre o plano  $\gamma$  e o PH) devemos cortá-los por um plano  $\beta$ , perpendicular à intersecção dos mesmos.

Então, chamando-se AB a intersecção de  $\gamma$  com o PH e cortando-se o diedro  $(\gamma, \text{PH})$  por  $\beta$ , perpendicular à AB, obtemos a reta MN, que faz com  $M1N1$ , sua projeção horizontal, o ângulo  $\alpha$  em questão, que é o ângulo do diedro em causa.

Assim MN é uma reta de maior declive do plano  $\gamma$ .

**Conclusão:** MN pertence ao plano  $\beta$  perpendicular à AB, sendo AB uma reta horizontal.

Esta reta tem as seguintes propriedades:

1. a reta de maior declive MN é perpendicular às retas horizontais do plano  $\gamma$  que o contém;
2. ela é suficiente para determinar o plano  $\gamma$ ;

Na é pura, se a reta  $(d_2, d_1)$  é uma reta de maior declive, uma horizontal  $(h_2, h_1)$  do plano, determinado pela reta de maior declive, tem a sua projeção horizontal  $h_1$  perpendicular à projeção horizontal  $d_1$  da mesma.

### **13. Reta de maior inclinação.**

É reta do plano  $\gamma$  que forma com sua projeção vertical o maior ângulo possível.

Da mesma maneira que para a reta de maior declive, podemos concluir facilmente que a reta de maior inclinação tem as seguintes propriedades:

1. é perpendicular às retas frontais do plano  $\gamma$ ;
2. é suficiente para determinar o plano  $\gamma$ .

## **EXERCÍCIOS**

1. Dar a é pura das retas “r” e “s”, e defini-las quanto a posição:

“r” - A (10,20,10) mm

B (30,10,30) mm

“s” - X (-30, -20, -20) mm

Y ( 0, -20, 30) mm

2. Determinar as projeções das retas, nos seguintes casos:

(executar a écura e a leitura perspectiva)

a) A(-60,40,30) mm ; B(-20,40,30) mm

Leitura:

/ / 2007

Épura:

/ / 2007

b) A (40, 10, 40) mm

B (40, 60, 40) mm

Leitura:

Épura:

/ / 2007

c) A (-30, 30, 10) mm

B (-30, 40, 50) mm

Leitura:

Épura:

		/ / 2007
44	Estudo da reta, exercícios.	Geom. Descr.

d) A (-60, 10, 30) mm

B (-20, 40, 30) mm

Leitura:

Épura:

/ / 2007

e) A (-60, 30, 10) mm

b (-20, 30, 40) mm

Leitura:

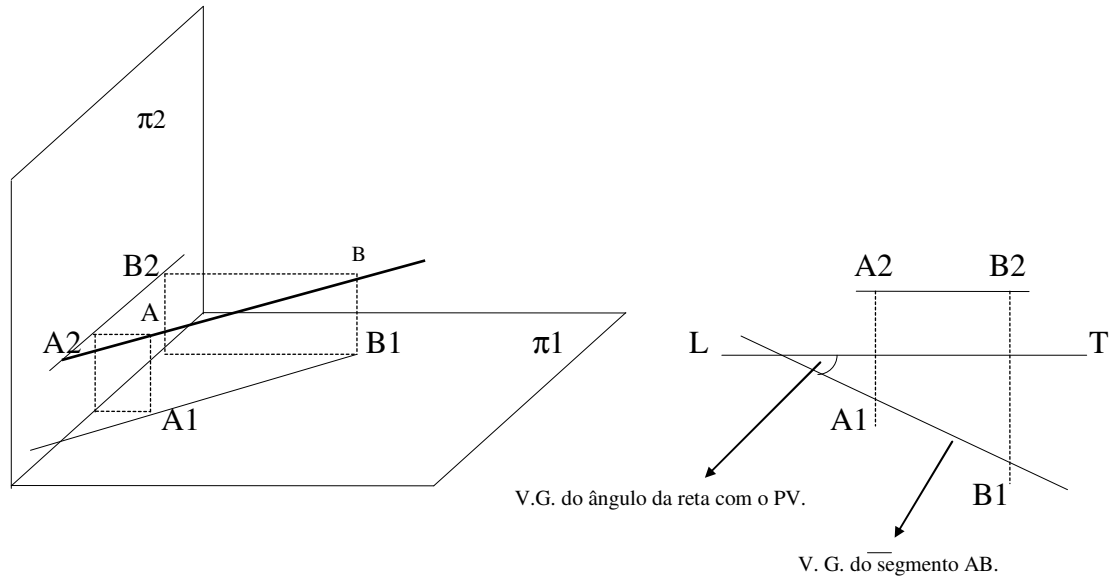
Épura:

/ / 2007

## VERDADEIRA GRANDEZA DE SEGMENTO DE RETA

Um segmento retilíneo projeta-se em verdadeira grandeza (V.G.) sobre todo plano que lhe é paralelo, na projeção cilíndrica. Um segmento (ou qualquer figura) somente projeta-se em V.G. num plano quando é paralelo a esse plano.

- Segmento paralelo ao PH:



- Segmento paralelo ao PV:

Para a determinação da V.G. de um segmento AB, não paralelo ao plano de projeção deve-se notar o seguinte:

a) o segmento AB no espaço é lado de um trapézio retângulo, cujas bases são as projetantes dos seus extremos e cujo outro lado é a sua própria projeção. (Em todo trapézio os lados paralelos são chamados bases).

		/ / 2007
47	Projeções: Estudo da reta	Geom. Descr.

b) o segmento AB no espaço é a hipotenusa de um triângulo retângulo que tem como catetos sua própria projeção e a diferença das projetantes.

$AB1 = A\pi B\pi \rightarrow$  projeção de AB.

$BB1 = BB\pi - AA\pi$ . Ou seja a diferença das projetantes.

$\alpha$  = ângulo que o segmento AB forma com o plano de projeção.

Aplicando o conhecimento na leitura (perspectiva) e na épura:

a) a determinação da V.G. do segmento e do ângulo que ele forma com o PH.

		/ / 2007
48	Projeções: Estudo da reta	Geom. Descr.

Exercício de Aplicação:

Determinar a verdadeira grandeza (V.G.) dos segmentos abaixo, e dos ângulos que eles formam com os dois planos de projeção. Resolução em é pura e leitura (perspectiva).

A(-40, 0, 0)

B(-10, 20, 20)

		/ / 2007
49	Projeções: Estudo da reta	Geom. Descr.

## DETERMINAÇÃO DA VISIBILIDADE DA RETA

Determinar a visibilidade de uma reta é definir os diedros pelos quais ela passa. Para isso, deve-se determinar, primeiramente, o(s) traços da reta.

É visível, apenas o trecho da reta situado no primeiro diedro e os planos de projeção são considerados opacos e ilimitados. Assim, o problema de visibilidade recai no problema da determinação dos traços da reta.

Traço de uma reta é o lugar onde ela fura o plano, assim:

- a) traço horizontal: é o lugar onde a reta fura o PH. Logo é um ponto de cota nula, e tem projeção vertical na LT.
- b) traço vertical: é o lugar onde a reta fura o PV. Logo é um ponto de afastamento nulo e tem projeção horizontal na LT.

Obs.: Não esquecer que, quando um ponto pertence a uma reta sua projeção horizontal esta projeção horizontal da reta, e sua projeção vertical esta na projeção vertical da reta.

/ / 2007

## POSIÇÃO RELATIVA DAS RETAS

Duas retas, consideradas uma em relação à outra, podem ser:

- a) coplanares: - paralelas;
  - concorrentes: - perpendiculares;
  - oblíquas.
- b) não coplanares: reversas.

Retas coplanares são as que pertencem ao mesmo plano:

- paralelas: estão no mesmo plano e não têm ponto em comum;
- concorrentes: possuem ponto em comum.

As retas concorrentes serão perpendiculares entre si, se encontrarem formando ângulos de  $90^\circ$ , caso contrário serão oblíquas.

Retas reversas são as que não pertencem ao mesmo plano, não são paralelas e não possuem ponto em comum.

### Retas paralelas

Duas retas são paralelas quando:

- a) suas projeções de mesmo nome são paralelas;
- b) num dos planos as projeções são paralelas e no outro são coincidentes;
- c) num dos planos as projeções são paralelas e no outro cada uma fica reduzida a um ponto.

Representação das três condições, em épura e em perspectiva:

a)

		/ / 2007
51	Projeções: Estudo da reta	Geom. Descr.

b)

c)

		/ / 2007
52	Projeções: Estudo da reta	Geom. Descr.

## Retas concorrentes

Duas retas são concorrentes quando:

- a) suas projeções de mesmo nome se cortam numa mesma reta de chamada;
- b) num dos planos as projeções são concorrentes e no outro são coincidentes;
- c) num dos planos as projeções são concorrentes e no outro uma delas reduz-se a um ponto situado na projeção da outra.

***Representação das três condições, em épura e em perspectiva:***

a)

		/ / 2007
53	Projeções: Estudo da reta	Geom. Descr.

b)

c)

		/ / 2007
54	Projeções: Estudo da reta	Geom. Descr.

## ESTUDO DO PLANO

### Alfabeto do Plano

#### Trços de um plano

Trços de um plano são suas intersecções com os planos de projeção,  $\pi_1$  e  $\pi_2$ .

O plano pode ser representado:

- a) pelos seus trços;
- b) por três pontos, não colineares;
- c) por um ponto e uma reta (quando o ponto não pertence à reta);
- d) por duas retas que se encontram;
- e) por duas retas paralelas;
- f) por sua reta de maior declive;
- g) por sua reta de maior inclinação.

Os trços de um plano bastam para determina-lo. Estudaremos nesse primeiro momento apenas os planos representados pelos seus trços.

OBS.: os planos do espaço serão designados pelas letras gregas minúsculas ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ....)

#### Posições que um plano pode ocupar em relação aos planos de projeção

##### **1. Plano qualquer**

É inclinado em relação ao PH, ao PV e ao PL.

Os traços de um plano são duas retas notáveis do mesmo.

Conforme observamos, se um ponto “A” pertence a uma reta “r”, “A2” pertencerá à “r2” e “A1” pertencerá à “r1”.

Da mesma forma, um ponto “A” pertencendo ao traço vertical do plano  $\alpha$ , “A2” deve pertencer a  $\alpha_2$  e “A1” pertencerá à linha de terra.

## **2. Plano horizontal ou de nível**

É paralelo ao PH e tem traço vertical paralelo à linha de terra.

## **3. Plano frontal**

É paralelo ao PV e tem traço horizontal paralelo à linha de terra.

		/ / 2007
56	Projeções: Estudo do Plano	Geom. Descr.

#### **4. Plano de topo**

É todo plano perpendicular ao plano vertical de projeção. (perpendicular ao PV e inclinado ao PH)

#### **5. Plano Vertical**

É todo plano perpendicular ao plano horizontal de projeção. (perpendicular ao PH e inclinado ao PV)

## **6. Plano de Perfil**

É todo plano perpendicular à linha de terra (paralelo ao PL).

OBS.: toda figura que pertence a um plano  $\alpha$  de perfil tem suas projeções sobre os traços do mesmo.

## **7. Plano de Rampa**

Pode ser chamado também de plano paralelo à linha de terra, ou ainda plano de ângulos complementares, porque  $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$ ; logo  $\alpha + \beta = 90^\circ$ .

É perpendicular ao PL e inclinado ao PV e ao PH.

## Generalidades

- a) Por um ponto podemos traçar infinitas retas, por dois pontos podemos traçar uma única reta;
- b) Um ponto e uma direção também determinam uma reta, pois por um ponto dado, paralelamente à reta dada, pode-se traçar uma única reta.
- c) Por uma reta podemos traçar infinitos planos, porém, por duas retas concorrentes ou paralelas podemos traçar um único plano; isto é, duas retas concorrentes ou paralelas, determinam um plano.
- d) Um plano pertence a uma reta quando tem suas projeções nas projeções de mesmo nome da reta, isto é, a projeção vertical do ponto está na projeção vertical da reta e a projeção horizontal do ponto está na projeção horizontal da reta.
- e) Um ponto pertence a um plano, quando pertence a uma reta desse plano.
- f) Uma reta pertence a um plano, quando seus traços estão nos traços de mesmo nome do plano, isto é, traço vertical da reta está no traço vertical do plano e o traço horizontal da reta está no traço horizontal do plano. Se a reta tiver ao menos um traço, sua outra projeção será paralela ao traço do plano. (Ex.: a reta tem apenas o traço vertical. Então, sua projeção horizontal é paralela ao traço horizontal do plano.
- g) Os dois planos, horizontal e frontal, apresentam certa semelhança, pois o que acontece com o primeiro em relação ao PH, acontece com o outro em relação ao PV.

Assim, as figuras do plano de nível tem projeção horizontal em V.G. e projeção vertical reduzida a uma reta coincidente com o traço vertical do plano.

As figuras do plano frontal têm projeção vertical em V.G. e projeção horizontal reduzida a uma reta coincidente com o traço horizontal do plano.

## **Intersecção de Planos**

Quando dois planos são secantes, isto é, “se cortam” ou “se interceptam”, essa intersecção é sempre uma reta, como podemos observar desde o início com a linha de terra que é a intersecção dos planos de projeções.

		/ / 2007
59	Projeções: Estudo do Plano	Geom. Descr.

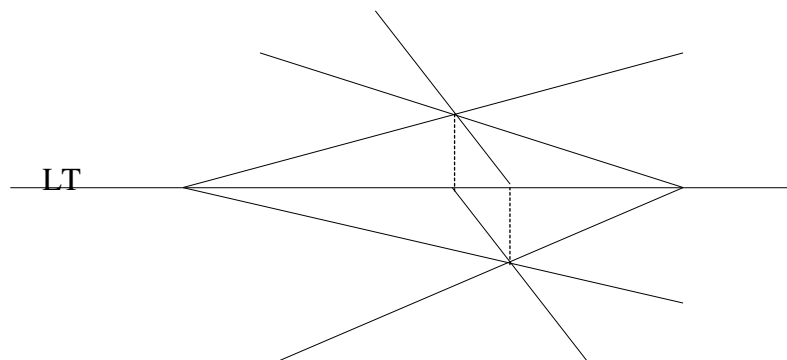
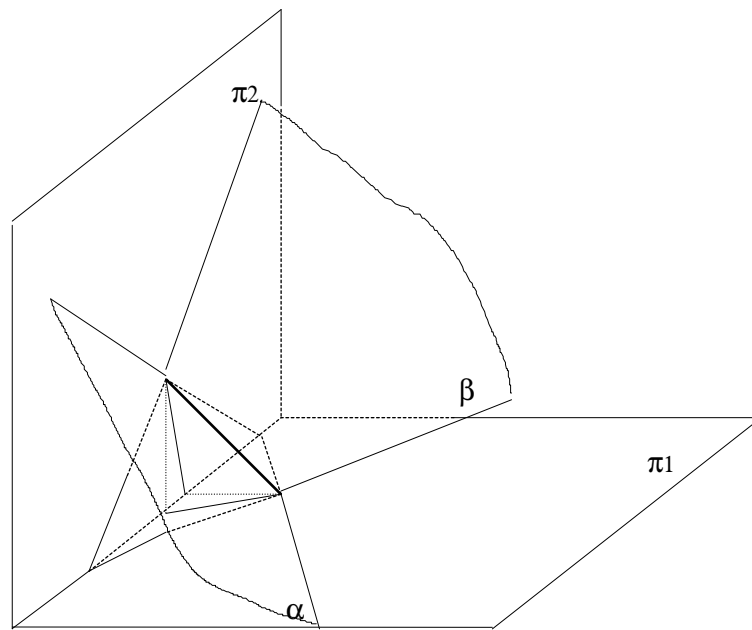
Para determinar a intersecção de dois planos, basta determinar dois pontos que sejam comuns a ambos os planos, ou apenas um ponto quando se conhece a direção da intersecção.

Para facilitar o estudo, dividimos os diversos casos em três grupos a saber:

1º) ambos os planos são dados pelos seus traços (cruzando-se ou não nos limites da época);

2º) apenas um dos planos é dado pelos seus traços;

3º) os planos não são dados pelos seus traços.



Obs.: no estudo de intersecção de planos, deve-se ter em mente que a reta intersecção, sendo comum aos dois planos, deverá ser uma reta que neles possa estar contida.

		/ / 2007
60	Projeções: Estudo do Plano	Geom. Descr.